

Beitrag zur Theorie der Normalenflächen.

(Mit 1 Tafel.)

Von Dr. **Gustav Ad. V. Peschka,**

k. k. Regierungsrath, ord. öffl. Professor der k. k. technischen Hochschule in Brünn.

Nachdem die Normalenflächen bisher nur eine äusserst spärliche analytische und, wo möglich, eine noch beschränktere synthetische und constructive Behandlung fanden, dürfte es einerseits, in Anbetracht der Wichtigkeit dieser Flächengattung für den Constructeur und den ausübenden Ingenieur, andererseits aber ganz besonders in Anbetracht des hohen Interesses, welches diesbezügliche eingehende Untersuchungen in theoretischer und wissenschaftlicher Beziehung bieten, gerechtfertigt erscheinen, wenn man vor Allem deren Entstehungsweisen in kurzen Umrissen bespricht, deren Eigenschaften, auf wissenschaftlicher Basis fussend, zu ermitteln, und sodann der Uebersichtlichkeit wegen, die durch Untersuchung, sowie durch gründliche Prüfung der gewonnenen Resultate festgestellten Eigenthümlichkeiten der Normalenflächen in einzelne Sätze, soweit diese allgemeine Giltigkeit besitzen, zu kleiden sucht.

Das Wenige, [1] was diesfalls bisher geboten worden ist, wurde selbstverständlich benützt, mit der vorliegenden Abhandlung in Einklang gebracht, die Form aber, da hier die Untersuchungen durchwegs rein geometrisch geführt wurden, in geeigneter Weise abgeändert, und indem das Bekannte gleichzeitig mit als Prüfstein für die hier erzielten Resultate verwendet wurde, eine nicht geringe Zahl neuer Sätze aufgestellt. Letztere ergaben sich einerseits als natürliche Folge der Anwendung der Principien der synthetischen Geometrie der Curven und Flächen höherer

[1] R. Sturm, Math. Annalen; E. Koutny, Sitzb. der k. Akademie der Wissensch., Wien B. LXXV, Ab. II. 1877. Šolin, böhm. Ges. der Wissensch., Prag. S. VI, B. II; La Gournérie, Surfaces tetraédrales symétriques.

Ordnung, andererseits aber durch directe Betrachtungen, so wie durch Berücksichtigung der Erzeugungsweise der Normalenflächen und der Eigenschaften ihrer Leitflächen und Leitcurven.

Eine Zusammenstellung der graphischen Ermittlungsweisen einzelner Erzeugenden der Normalenflächen für die verschiedenen Gattungen von Leitflächen den vorliegenden Untersuchungen vorauszuschicken, und dabei gleichzeitig auf die bei der Construction der Normalen sich darbietenden Vereinfachungen hinzuweisen, unterblieb, da es dem Zwecke dieser Abhandlung „Neues zu bieten" nicht ganz entspräche.

Eigenschaften der Normalenflächen.

Eine Normalenfläche ist der geometrische Ort der Normalen einer gegebenen Fläche F in den einzelnen Punkten einer auf dieser Fläche F verzeichneten Curve C.

Die gegebene Fläche F bezeichnen wir in dieser Eigenschaft als die „Directrix- oder Leitfläche" der Normalenfläche, während wir die auf F verzeichnete Curve C die „Directrix- oder Leitcurve" der Normalenfläche nennen.

Da eine jede Normalenfläche nach obiger Definition durch gerade Linien erzeugt wird, so kann dieselbe nur eine „windschiefe" oder in besonderen Fällen (wie bekannt, längs der „Krümmungslinien„) eine „aufwickelbare", also kurz eine Regelfläche sein.

Von hervorragender Wichtigkeit ist es, den jeweiligen Grad der Normalenfläche zu bestimmen, wenn die Leitfläche und auf derselben die Leitcurve gegeben ist.

Wir wollen diesfalls voraussetzen, die Leitfläche F (Fig. 1) sei eine allgemeine Fläche m-ter Ordnung (ohne vielfache Curven und ohne Spitzen). Auf F sei als Leitcurve für die Normalenfläche eine Curve L von der Ordnung m_1 gegeben, wobei es gleichgiltig sein mag, ob die Curve L als vollständiger oder theilweiser Schnitt der Fläche F mit irgend einer zweiten Fläche F' von der Ordnung m' resultire. Im Falle des vollständigen Durchschnittes beider Flächen ist selbstverständlich

$$m_1 = m.m'.$$

Denken wir uns in allen Punkten der Leitcurve L an die Fläche F die Tangentialebenen gelegt, so umhüllen diese eine

developpable Fläche D, welche der Fläche F längs der Curve L umschrieben ist.

Da nun die Normalen der Fläche F in den einzelnen Punkten von L auf den bezüglichen Berührungsebenen senkrecht stehen, so sind dieselben gleichzeitig auch Normalen der Developpablen D, d. h. die Normalenfläche der Fläche F längs der Curve L ist identisch mit der Normalenfläche jener Developpablen D längs L, welche der ursprünglichen Fläche F nach der Curve L umschrieben wurde.

Wir wollen zunächst die Classe der Developpablen D, d. h. die Anzahl der Berührungsebenen an dieselbe, welche durch einen beliebigen Punkt P gehen, ermitteln.

Da diese Tangirungsebenen auch die Fläche F und zwar in Punkten der Curve L berühren müssen, so erhält man die Berührungspunkte $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ derselben mit der Fläche F als Schnittpunkte der Curve L und der Berührungscurve B der Fläche F mit dem ihr aus P umschriebenen Kegel.

Die genannte Berührungscurve B ist aber bekanntlich der Schnitt der Fläche F mit der dem Punkte P entsprechenden ersten Polarfläche, welche von der $(m-1)$-ten Ordnung ist.

Die Polarfläche schneidet die Leitcurve L in $m_1\,(m-1)$ Punkten, welche keine andern als die obgenannten Berührungspunkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ sein können.

Die Anzahl der von einem Punkte P an die Developpable D geführten Berührungsebenen, oder mit anderen Worten, die Classe der Developpablen D ist mithin:

$$m_1(m-1).$$

Da der ebene Schnitt einer aufwickelbaren Fläche von der nämlichen Classe ist wie diese selbst, so ist weiters auch klar, dass die unendlich ferne Curve U_d der Developpablen D gleichfalls von der $m_1(m-1)$-ten Classe sein wird.

Dasselbe gilt auch von dem Richtungskegel R_d der Developpablen D, d. h. von einem Kegel, welcher mit D die unendlich ferne Curve U_d gemeinschaftlich hat, oder, was dasselbe ist, welcher sich als Enveloppe der durch einen festen Punkt zu den Berührungsebenen D parallel gelegten Ebenen ergibt.

Nach dieser kurzen Vorbereitung kehren wir zur Betrachtung der Normalenfläche zurück.

Denken wir uns in irgend einem Punkte A der Leitcurve L die Normale AA', d. i. die Senkrechte zur entsprechenden Tangentialebene T der Fläche F oder der Developpablen D construirt, so wird die Gerade SA'', welche man durch den Scheitel S des Richtungskegels R_d parallel zur Normale AA' zieht, auch senkrecht stehen auf jener Berührungsebene T'' des Richtungskegels R_d, welche zur Tangentialebene T parallel ist.

Zieht man somit zu allen Tangentialebenen des Kegels R_d durch den Scheitel S Senkrechte, so erhält man einen zweiten Kegel R_n, dessen Erzeugenden zu sämmtlichen Normalen der Fläche F längs der Curve L parallel sind, und welcher demnach den Richtungskegel der Normalenfläche vorstellt.

Nennen wir die unendlich ferne Curve dieses Richtungskegels, welche selbstverständlich auch der Normalenfläche angehört U_n, so ist leicht nachzuweisen, dass U_n von der $m_1(m-1)$-ten Ordnung sei.

Die Erzeugenden des Kegels R_n sind nämlich senkrecht zu den Berührungsebenen des zweiten Kegels R_d. Die unendlich fernen Curven U_n und U_d sind somit polar reciprok in Bezug auf den imaginären Kugelkreis im Unendlichen, d. h. die Ordnung der einen ist der Classe der anderen gleich, und umgekehrt.

Es wurde aber nachgewiesen, dass die Curve U_d von der $m_1(m-1)$-ten Classe sei, woraus folgt, dass die Curve U_n der $m_1(m-1)$-ten Ordnung angehöre.

Hiernach kennen wir für die Normalenfläche bereits zwei Leitlinien, und zwar die Curven L und U_n.

Berücksichtigt man, dass es im Allgemeinen zu einer beliebigen Normalen der Fläche in Punkten der gegebenen Leitcurve keine zweite, parallele gebe, und dass andererseits in jedem Punkte der Leitlinie L auch nur eine Normale zur Fläche F gezogen werden kann, so ist klar, dass die Curven L und U_n einfache Leitlinien der windschiefen Fläche sind.

Eine unmittelbare Folge hievon ist, dass die krummen Punktreihen, welche auf ihnen durch die erzeugenden Normalen bestimmt werden, ein—eindeutig sind.

Wäre dies nicht der Fall, sondern wäre die Curve L etwa μ-deutig und jene $U_n \dots \mu_1$-deutig, so würden jedem Punkte von $L \dots \mu_1$ Punkte auf U_n entsprechen, d. h. durch jeden Punkt von L würden μ_1 Erzeugende der windschiefen Fläche gehen; sie wäre

also eine μ-$_1$fache Curve dieser Fläche. Andererseits würde die Leitcurve U_n eine μ-fache Curve der windschiefen Fläche vorstellen.

Die Erzeugenden der windschiefen Normalfläche ergeben sich mithin als die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier eindeutigen Reihen auf den Leitcurven L und U_n, welche beziehungsweise von den Ordnungen m_1 und $m_1(m-1)$ sind.

Diese Bedingung erlaubt uns, den Grad der Normalenfläche, d. h. die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden G, oder die Anzahl ihrer Erzeugenden, welche G schneiden, ohne jedwede Schwierigkeit zu bestimmen.

Denken wir uns nämlich die Gerade G als gemeinschaftliche Axe zweier Ebenenbüschel G_l und G_u, wovon das erstere zu der Reihe auf L, das zweite zu der Reihe auf U_n perspectivisch ist, und sehen wir nach, in welcher Weise diese beiden Ebenenbüschel einander entsprechen.

Irgend eine Ebene des Büschels G_l schneidet die Curve L in m_1 Punkten, welchen, wie oben vorausgesetzt wurde, auf der Curve U_n gleichfalls m_1 Punkte, mithin m_1 Ebenen des zweiten Büschels G_u entsprechen. Dieses letztere Büschel ist also m_1-deutig.

Hingegen schneidet eine Ebene des Büschels G_u die Curve U_n in $m_1(m-1)$ Punkten, welchen auf der Curve L ebenfalls $m_1(m-1)$ Punkte im Büschel G_l, also $m_1(m-1)$ Ebenen entsprechen. Dieses Ebenenbüschel ist sonach $m_1(m-1)$-deutig.

Während also jeder Ebene des Büschels G_l. . m_1 Ebenen des Büschels G_u entsprechen, entsprechen einer jeden Ebene des Büschels G_u . . . $m_1(m-1)$ Ebenen des Büschels G_l.

Nach dem Chasles'schen Correspondenzsatze haben diese beiden Ebenenbüschel:

$$m_1+m_1(m-1) = m\,m_1$$

Doppelebenen, d. h. es kömmt im Ganzen mm_1mal vor, dass eine Ebene des einen Büschels mit ihrer entsprechenden im zweiten Büschel zusammenfällt.

Jede dieser mm_1 Doppelebenen erhält ausser der Axe G zwei entsprechende Punkte der Reihen auf L und U_n, mithin eine Erzeugende der Normalenfläche.

Es gibt also mm_1 Erzeugende der Normalenfläche, deren jede mit der beliebig gewählten Geraden G in einer Ebene liegt, die-

selbe sonach schneidet oder mit anderen Worten: Die betrachtete Normalenfläche ist vom mm_1-ten Grade.

Hiernach ergibt sich der Satz:

„Die Normalenfläche, deren Leitfläche eine allgemeine Fläche m-ter Ordnung, und deren Leitcurve eine auf dieser Fläche verzeichnete Curve m_1-ter Ordnung ist, wird im Allgemeinen eine windschiefe Fläche $m . m_1$-ter Ordnung sein.“

Zu dem vorstehenden Resultate kann man auch auf folgende Weise gelangen:

Die Leitcurven für die Normalenfläche sind L und U_n; die Erzeugenden derselben sind die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punkte zweier auf L und U_n liegenden projectivischen Punktreihen. Ferner ist bekannt, dass der ebene Schnitt einer Fläche von der nämlichen Ordnung sei, wie die Fläche selbst.

Um daher den Grad (die Ordnung) der Normalenfläche zu bestimmen, betrachten wir einen ihrer ebenen Schnitte, etwa jenen mit der unendlich fernen Ebene. Dieser besteht fürs Erste aus der einfachen Leitcurve U_n, welche von der $m_1(m-1)$-ten Ordnung ist, ferner trifft die Curve L, da sie der m_1-ten Ordnung angehört, die unendlich ferne Ebene in m_1 (reellen oder imaginären) Punkten, welchen auf U_n ebenfalls m_1 Punkte entsprechen, so dass die unendlich ferne Ebene ausser der Curve U_n noch m_1 Erzeugende der Normalenfläche enthält.

Der Gesammtschnitt dieser Fläche mit der unendlich fernen Ebene besteht demnach aus der einfachen Curve U_n und m_1 Erzeugenden, ist demgemäss von der Ordnung:

$$m_1(m-1)+m_1 = mm_1,$$

welches Resultat mit dem früheren übereinstimmt.

Die Normalenflächen der Flächen zweiten Grades längs ihrer ebenen Schnitte sind bereits theilweise[1] untersucht und als Flächen vierten Grades erkannt worden. Da hierbei, $m = m_1 = 2$ ist, ergibt sich $m . m_1 = 4$.

Für den Fall, dass die Leitfläche F eine Ebene ist, wird $m = 1$. Für irgend eine in dieser Ebene liegende Curve m_1-ter Ordnung ist die Normalenfläche ein Cylinder m_1-ter Ordnung; es behält daher der Ordnungswerth $m . m_1 = m_1$ seine volle Giltigkeit.

[1] Koutny, Šolin.

Setzen wir nun ganz allgemein voraus, die Leitfläche F besitze doppelte Curven, welche die Leitlinie L der Normalenfläche in s Punkten schneiden.

Denken wir uns abermals der Fläche F längs der Leitcurve L die Developpable D umschrieben und deren Classe, d. h. die Anzahl der von einem beliebigen ausserhalb der Fläche liegenden Punkte P an diese möglicherweise zu führenden Tangentialebenen bestimmt. Im vorhergehenden Falle haben wir diese Anzahl übereinstimmend mit der Zahl der Schnittpunkte von L mit der ersten Polarfläche der Fläche F für den Punkt P gefunden und durch $m_1(m-1)$ ausgedrückt.

Dieser Werth erleidet eine Veränderung, wenn die Fläche F vielfache Curven besitzt.

Es ist nämlich bekannt, dass in diesem Falle die erste Polarfläche der Fläche F für irgend einen beliebigen Punkt P mit der Fläche F ausser der Berührungscurve B der von P aus gezogenen Tangenten auch noch sämmtliche vielfache Linien gemein hat. Es ist hiernach klar, dass die Tangentialebenen von F in den Punkten dieser vielfachen Curven, da sie eine ganz bestimmte Lage haben, durch den willkürlich gewählten Punkt nicht hindurchgehen können.

Unter den $m_1(m-1)$ Schnittpunkten der Leitcurve L mit der ersten Polarfläche für den Punkt P sind nun auch die vorausgesetzten s Schnittpunkte der Leitcurve L mit den doppelten Linien der Fläche F inbegriffen. In diesen Punkten besitzt die Fläche F, also auch die ihr längs L umschriebene Developpable D ganz bestimmte Tangentialebenen, welche durch den Punkt P nicht hindurchgehen, bei der Bestimmung der Classe der Developpablen D mithin nicht gezählt werden dürfen.

Es ergibt sich somit in diesem Falle als Classe der Developpablen D die Zahl:

$$m_1(m-1)-s.$$

Nachdem dies festgestellt ist, wird der weitere Gang unserer Betrachtungen mit dem früher eingeschlagenen in vollem Einklange sein. Die Ordnung des Richtungskegels R_n der Normalenfläche, oder, was gleichbedeutend ist, die Ordnung der unendlich fernen Leitcurve U_n der Normalfläche ist, wie im vorher-

gehenden Falle, gleich der Classe der Developpablen D, also gleich:

$$m_1(m-1)-s.$$

Die Normalenfläche selbst ist der Ort der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier eindeutigen Reihen auf L und U_n, und der Grad derselben ergibt sich als Summe der Ordnungen der beiden Leitcurven L und U_n, wird sonach ausgedrückt durch:

$$m_1+m_1(m-1)-s = m\,m_1-s.$$

Wir erhalten somit, wenn m die Ordnung der Leitfläche F, m_1 die Ordnung der Leitlinie L und s die Anzahl der Schnittpunkte von L mit den doppelten Linien auf der Fläche F bedeutet, den Satz:

„Der Grad der einer Fläche F längs einer auf ihr verzeichneten Leitcurve L entsprechenden Normalenfläche ist durch: $(m\,m_1-s)$ bestimmt."

Wir wollen die Richtigkeit des gefundenen Resultates durch Anwendung desselben auf eine bekannte Eigenschaft windschiefer Flächen erhärten.

Bekanntlich besitzt eine Regelfläche m-ten Grades eine Doppelcurve, welche jede Erzeugende in $(m-2)$ Punkten trifft. Der Grad der Normalenfläche einer windschiefen Fläche längs einer geradlinigen Erzeugenden derselben, wird nun, nach dem oben aufgestellten Satze, da $m_1 = 1$ und $s = m-2$ ist, durch:

$$m_1 m - s = m-(m-2) = 2$$

ausgedrückt erscheinen.

In der That besitzt eine Regelfläche längs einer geradlinigen Erzeugenden ein hyperbolisches Paraboloid als Normalenfläche.

Um zu weiteren Resultaten zu gelangen, wollen wir noch die übrigen Charakteristiken der der Leitfläche F längs der Leitcurve L umschriebenen Developpablen D ermitteln.

Die Ordnung der Fläche sei m und die Leitcurve L, welche wir als vollständigen Durchschnitt der Fläche F mit einer Fläche m'-ter Ordnung voraussetzen wollen, werde sonach durch eine Curve $m\,m'$-ter Ordnung dargestellt.

Ist nun P ein Punkt im Raume, so ist dessen erste Polarfläche in Bezug auf die Fläche F von der $(m-1)$-ten Ordnung. Dieselbe schneidet die Leitcurve L somit in $m \,.\, m'(m-1)$ Punkten.

In jedem dieser Punkte geht die Tangentialebene der Fläche F, also auch jene der Developpablen D durch den Punkt P, d. h., die Zahl

$$mm'(m-1)$$

bestimmt die Classe der Developpablen D.

Nehmen wir nun an, die erste Polarfläche des Punktes P berühre die Leitcurve L in irgend einem Punkte R, oder mit anderen Worten, der Punkt R vereinige in sich zwei der $mm'(m-1)$ Schnittpunkte. Unter dieser Voraussetzung gibt es offenbar in R zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Tangentialebenen der Fläche F, also auch der Developpablen D, welche durch den Punkt P gehen.

Der Schnitt PR dieser beiden Berührungsebenen ist mithin eine Erzeugende der Developpablen D, oder, was dasselbe ist, der Punkt P liegt auf D.

Auf Grund dieser Eigenschaft ist es nunmehr leicht, die Ordnung der Developpablen D zu bestimmen, d. h. die Anzahl der Punkte, welche eine beliebige Gerade G des Raumes mit der Developpablen D gemein hat, festzustellen, oder mit Rücksicht auf das Vorhergegangene, die Anzahl jener Punkte auf der Geraden G, deren erste Polarflächen in Bezug auf die Fläche F die Curve L berühren, anzugeben.

Da die Fläche F von der m-ten Ordnung ist, so ist ihre erste Polarfläche von der Ordnung $(m-1)$; die Polarflächen aller Punkte der Geraden G bilden mithin in Bezug auf die Fläche F, ein Flächenbüschel der $(m-1)$-ten Ordnung.

Nun ist bekannt (Cremona, Theorie der Oberflächen), dass es in einem Flächenbüschel μ-ter Ordnung:

$$\mu_1 \cdot \mu_2(\mu_1 + \mu_2 + 2\mu - 4)$$

Flächen gibt, welche die Schnittlinie zweier Flächen von den Ordnungen μ_1 und μ_2 berühren.

Im vorliegenden Falle ist: $\mu = m-1$, $\mu_1 = m$ und $\mu_2 = m'$, mithin obige Zahl gleich:

$$m.m'[m + m' + 2(m-1)-4] = mm'(3m + m'-6).$$

Dies ist somit die Anzahl der Polarflächen jener Punkte der Geraden G, welche zugleich die Leitcurve L berühren, also die Zahl der Punkte, welche G mit der Developpablen D gemein hat, oder mit anderen Worten, die Ordnung der Developpablen D, welche wir kurz mit r bezeichnen wollen.

Die unendlich ferne Curve U_d der Developpablen D ist mithin eine Curve

$mm'(3m+m'-6)$-ter Ordnung
und $mm'(m-1)$-ter Classe.

Bezeichnen wir mit i die Zahl der Inflexionstangenten und mit ϑ jene der Doppeltangenten der Curve U_d, so ist nach Plücker:

$$r=n(n-1)-2\vartheta-3i$$

oder, indem wir für r und n die oben angegebenen Werthe einsetzen:

$$mm'(3m+m'-6)-mm'(m-1)[mm'(m-1)-1]=-(2\vartheta+3i).$$

Jeder Inflexionstangente würde eine stationäre oder Wendeebene der Developpablen D entsprechen, d. h., es müssten auf der Leitcurve L Punkte vorhanden sein, in welchen die Leitfläche stationär wäre. Da es aber auf einer Fläche im Allgemeinen bloss eine endliche Anzahl von Punkten gibt, welche diese Eigenschaft besitzen, und dieselben demnach gleichsam nur zufällig auf der Leitcurve L liegen könnten, so folgt, dass im Allgemeinen $i=0$ ist.

Wir haben daher:

$$\begin{aligned}2\vartheta&=mm'(m-1)[mm'(m-1)-1]-mm'(3m+m'-6)\\&=m^2m'^2(m-1)^2-mm'(m-1)-mm'(3m+m'-6)\\&=mm'[mm'(m-1)^2-(4m+m'-7)]\end{aligned}$$

und hiernach die Anzahl der Doppeltangenten der unendlich fernen Curven U_d der Developpablen D gleich:

$$\vartheta=\frac{mm'}{2}[mm'(m-1)^2-(4m+m'-7)].$$

Nun ist aber, wie früher gezeigt wurde, die unendlich ferne Leitlinie U_n der Normalenfläche die Reciprocalcurve der Curve U_d bezüglich des imaginären Kugelkreises. Den Doppeltangenten ϑ der letzteren entsprechen dann Doppelpunkte δ der ersteren in gleicher Zahl, woraus folgt, dass die Anzahl der Doppelpunkte, welche die Curve U_n besitzt, ausgedrückt wird durch:

$$\delta=\frac{mm'}{2}[mm'(m-1)^2-(4m+m'-7)]$$

Ausser diesen δ Punkten entsprechen aber dem Schnitte der Normalenfläche mit der unendlich fernen Ebene noch andere Doppelpunkte.

Der Schnitt besteht nämlich aus der Curve U_n und aus den mm' Erzeugenden der Fläche, welche die Schnittpunkte der Leitcurve L (von der mm'-ten Ordnung) und der unendlich fernen Ebene mit den entsprechenden Punkten von U_n verbinden.

Diese mm' Erzeugenden schneiden sich gegenseitig in

$$\frac{mm'}{2}(mm'-1)$$

Punkten, welche Doppelpunkte des Gesammtschnittes vorstellen. Ferner schneidet jede dieser Erzeugenden die Curve U_n in

$$mm'(m-1)$$

Punkten, von welchen einer den Berührungspunkt der unendlich fernen Ebene mit der Normalenfläche in der betreffenden Erzeugenden vorstellt, während die übrigen

$$[mm'(\mathrm{m}-1)-1]$$

Punkte auf jeder der mm' Erzeugenden wirkliche Doppelpunkte sind.

Es ergibt sich sonach die Zahl sämmtlicher Doppelpunkte als Summe von:

$$\delta,\ \frac{mm'}{2}(mm'-1) \text{ und } mm'[mm'(m-1)-1]$$

und ist daher ausgedrückt durch:

$$\frac{mm'}{2}[2mm'(m-1)-2+mm'-1+mm'(m-1)^2-(4m+m'-7)]$$

$$=\frac{mm'}{2}[2m^2m'-2mm'+mm'+m^3m'-2m^2m'+$$

$$+mm'-4m-m'+7-3]$$

$$=\frac{mm'}{2}[m^3m'-4m-m'+4].$$

Die gefundenen Doppelpunkte sind die Schnittpunkte der unendlich fernen Ebene mit der Doppelcurve der windschiefen Normalenfläche; ihre Anzahl bestimmt mithin die Ordnung dieser Doppelcurve.

Es gilt mithin der Satz:

„Die Doppellinie der Normalenfläche einer Fläche m-ter Ordnung längs ihres Durchschnittes mit einer Fläche m'-Ordnung ist eine Curve“

$$\frac{mm'}{2}[m^3m'-4m-m'+4]\text{-ter Ordnung.}$$

Es unterliegt nunmehr auch keiner weiteren Schwierigkeit, die übrigen Charakteristiken der Developpablen D zu bestimmen.

Bezeichnen wir wieder mit r die Ordnung, mit n die Classe der Developpablen D, mit i die Zahl der Inflexionstangenten ihres ebenen Schnittes und mit μ die Ordnung der zugehörigen Cuspidalkante, so ist nach Plücker:

$$\mu - i = 3(r-n)$$

oder, da im vorliegenden Falle $i=0$,

$$r = mm'(3m+m'-6) \text{ und } n = mm'(m-1) \text{ ist, wird:}$$
$$\mu = 3mm'(3m+m'-6-m+1) \text{ oder:}$$
$$\mu = 3mm'(2m+m'-5).$$

Benennen wir mit β die stationären Punkte der Cuspidalkante, so erhalten wir diese nach der Plücker'schen Formel

$$n - \beta = 3(r-\mu).$$

Nachdem $n = mm'(m-1)$; $r = mm'(3m+m'-6)$ und $\mu = 3mm'(2m+m'-5)$ ist, wird:

$$\beta = n - 3(r-\mu) \text{ oder:}$$
$$\beta = mm'(m-1) - 3mm'[(3m+m'-6) - 3(2m+m'-5)]$$
$$= mm'[m-1-9m-3m'+18+18m+9m'-45) \text{ oder}$$
$$\beta = 2mm'(5m+3m'-14)$$

Für die x Doppelpunkte des ebenen Schnittes mit der Developpablen D hat man die bekannte Gleichung:

$$n = r(r-1) - 2x - 3\mu \text{ oder}$$
$$2x = r(r-1) - n - 3\mu;$$

für r, n und μ die entsprechenden Werthe substituirt erhält man:

$$2x = m^2m'^2(3m+m'-6)^2 - mm'(3m+m'-6) - mm'(m-1) - 9mm'(2m+m'-5) \text{ oder}$$

$$x = \frac{m^2m'^2}{2}(3m+m'-6)^2 - mm'(11m+5m'-26).$$

Die Singularitäten des ebenen Schnittes der Developpablen D gelten natürlich auch für die unendlich ferne Curve U_d derselben.

Nun wissen wir, dass die unendlich ferne Curve U_n der Normalenfläche zu U_d reciprok ist. Es entsprechen sonach den Singularitäten von U_d ebenfalls Singularitäten der Curve U_n, und zwar den Doppel- und Rückkehrpunkten von U_d Doppel- und Inflexionstangenten von U_n und umgekehrt.

Nachdem die Anzahl der Doppelpunkte von U_d durch:

$$x = \frac{m^2 m'^2}{2}(3m + m' - 6)^2 - mm'(11m + 5m' - 26)$$

festgestellt wurde, ergeben sich die Doppeltangenten von U_n in gleicher Zahl.

Die Rückkehrpunkte von U_d ergeben sich als Schnittpunkte der Cuspidalkante mit der unendlich fernen Ebene; ihre Anzahl stimmt überein mit der Ordnung der Cuspidalkante, ist also gleich:

$$3mm'(2m + m' - 5),$$

durch welche Zahl mithin auch die Inflexionstangenten der Curve U_n ausgedrückt erscheinen.

Die Anzahl der Doppelpunkte von U_n wurde bereits durch

$$\frac{mm'}{2}(m^3 m' - 4m - m' + 4)$$

festgestellt.

Bedeutet ν die Ordnung einer ebenen Curve, μ deren Classe, δ die Zahl der Doppelpunkte, $\varkappa$ jene der Rückkehrpunkte, die der Doppeltangenten, i die Anzahl der Inflexionstangenten und p das Geschlecht dieser Curve, so ist bekanntlich:

$$p = \frac{(\nu - 1)(\nu - 2)}{2} - \delta - \varkappa = \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{2} - \tau - i.$$

Unter dem Geschlechte einer Raumcurve versteht man das Geschlecht ihrer Projektion auf eine Ebene.

Das Geschlecht von U_n wird daher, da für die Leitcurve U_n

$$\nu = mm'(m - 1),$$

$$\delta = \frac{mm'}{2}[mm'(m - 1)^2 - (4m + m' - 7)] \text{und } \varkappa = 0$$

gefunden wurde, ausgesprochen durch:

$$\frac{1}{2}[mm'(m-1)-1][mm'(m-1)-2]-\frac{m^2m'^2}{2}(m-1)^2+\frac{mm'}{2}(4m+m-7)$$
$$= \frac{m^2m'^2}{2}(m-1)^2-\frac{3mm'}{2}(m-1)+1-\frac{m^2m'^2}{2}(m-1)^2$$
$$+\frac{mm'}{2}(4m+m'-7) \text{ oder:}$$
$$\frac{mm'}{2}(m+m'-4)+1.$$

Bezeichnet man ferner mit ν die Ordnung der Leitcurve, respective ihrer Projection auf eine Ebene und mit h die Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte d. i. der durch einen beliebigen Punkt gehenden zweipunktigen Secanten der Raumcurve (Doppelpunkte ihrer Projection), so ist das Geschlecht der Leitcurve L oder beziehungsweise jenes ihrer Projection auf eine Ebene ausgedrückt durch:

$$\frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)-h.$$

Nachdem die Ordnung der Leitcurve, also auch ihre Projection gleich mm' ist, wird die Zahl

$$h=\frac{mm'}{2}(m-1)(m'-1)$$

mithin das Geschlecht von L:

$$\frac{1}{2}(mm'-1)(mm'-2)-\frac{mm'}{2}(m-1)(m'-1)$$
$$=\frac{m^2m'^2}{2}-\frac{3mm'}{2}+1-\frac{m^2m'^2}{2}+\frac{mm'}{2}(m+m')-\frac{mm'}{2}$$
$$=\frac{mm'}{2}(m+m'-4)+1$$

sein.

Hieraus ist gleichzeitig zu ersehen, dass die beiden Leitcurven U_n und L der Normalenfläche von gleichem Geschlechte sind. Dieses gilt, wie bekannt[1], für alle auf einer windschiefen Fläche verzeichneten Curven, welcher Ordnung dieselben auch sein mögen, wenn die Erzeugenden der windschiefen Fläche auf diesen Curven eindeutige Punktreihen bestimmen, woraus das Gesagte in der oben entwickelten Weise folgt.

---

[1] Cremona, Theorie der Oberflächen. Cap. VIII. §§. 57, 58.

Nach diesen Auseinandersetzungen wollen wir noch zu ermitteln suchen, wie viele Erzeugende eine windschiefe Normalenfläche besitze, in welchen sie den Charakter einer aufwickelbaren Fläche annimmt, d. h. längs welcher sie eine einzige Berührungsebene zulässt, oder mit anderen Worten, wir wollen die Anzahl jener Normalen feststellen, welche von den unmittelbar folgenden geschnitten werden.

Zu diesem Behufe stellen wir folgende Vorbetrachtungen an:

In irgend einer Ebene seien zwei beliebige Curven C_1 und C_2 (Fig. 2), von den bezüglichen Classen n_1 und n_2 und vom selben Geschlechte gegeben. Dieselben seien als Enveloppen eindeutig auf einander bezogen. Jeder Tangente der einen Curve wird somit eine, aber auch nur eine Tangente der anderen entsprechen.

Der geometrische Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Tangenten ist eine Curve K, deren Ordnung leicht zu bestimmen sein wird.

Nehmen wir eine beliebige Gerade G in der Ebene der beiden Curven C_1 und C_2 an und betrachten wir die beiden Punktreihen R_1 und R_2, welche die Tangenten der Curve C_1, respective C_2 auf G bestimmen.

Da die Curve C_1 von der n_1-ten Classe ist, werden von einem beliebigen Punkte x_1 der Geraden G auch n_1 Tangenten an C_1 gezogen werden können, die wir mit t_1^1, t_1^2, $t_1^3 \ldots\ldots t_1^{n_1}$ bezeichnen wollen.

Jeder einzelnen dieser Tangenten entspricht eine Tangente der Curve C_2, welche wir t_2^1, t_2^2, $t_2^3 \ldots t_2^{n_1}$ nennen, während die Schnittpunkte derselben mit der Geraden G, durch x_2^1, x_2^2, $x_2^3 \ldots\ldots x_2^{n_1}$ bezeichnet seien.

Betrachten wir den Punkt x_1 als Element der Reihe R_1, so entsprechen demselben in der Reihe R_2 die n_1 Punkte x_2^1, x_2^2, $x_2^3 \ldots\ldots x_2^{n_1}$ und auf gleiche Weise werden einem Punkte y_2 der Reihe R_2 die n_2 Punkte y_1^1, y_1^2, $y_1^3 \ldots y_1^{n_2}$ der Reihe R_1 entsprechen. Die beiden Reihen R_1 und R_2 sind mithin in der Weise aufeinander bezogen, dass einem Punkte der einen, n_1 Punkte der zweiten und umgekehrt einem Punkte der zweiten Reihe, n_1 Punkte der ersten entsprechen.

Nach dem Chasles'schen Correspondenzprincipe besitzen diese beiden auf G liegenden Reihen $(n_1 + n_2)$ Doppelpunkte, d. h.

es kömmt $(n_1 + n_2)$mal vor, dass ein Punkt der einen Reihe mit seinem entsprechenden Punkte auf der anderen Reihe coïncidirt.

Auf einer beliebigen Geraden G gibt es also $(n_1 + n_2)$ Punkte, in welchen sich entsprechende Tangenten der beiden Curven C_1 und C_2 schneiden, und die Curve, welche die Schnittpunkte entsprechender Tangenten von C_1 und C_2 erzeugen, ist von der $(n_1 + n_2)$-ten Ordnung.

Sei nun R eine windschiefe Fläche m-ter Ordnung und r-ten Ranges, wobei unter Rang die Classe eines ebenen Schnittes der Fläche zu verstehen ist, und nehmen wir an, c_1 und c_2 (Fig. 3) seien zwei ebene Schnitte der windschiefen Fläche R, also der Voraussetzung gemäss, Curven r-ter Classe.

Die Developpablen D_1 und D_2, welche der windschiefen Fläche R längs der beiden ebenen Schnitte c_1 und c_2 umschrieben gedacht werden können, sind selbstverständlich gleichfalls von der r-ten Classe.

Die geradlinigen Erzeugenden der windschiefen Fläche R schneiden die beiden Curven c_1 und c_2 in eindeutigen Punktreihen, es können somit auch die Tangenten der Curven c_1 und c_2 in entsprechenden, d. i. in solchen Punkten ξ_1 und ξ_1, welche eine Erzeugende g von R auf c_1 und c_2 bestimmt, eindeutig auf einander bezogen werden.

Dasselbe gilt aber auch von den Berührungsebenen der Developpablen D_1 und D_2. Die Ebene, welche durch g und die Tangente t_1 im Punkte ξ_1 geht, berührt die windschiefe Fläche in dem nämlichen Punkte, ist mithin eine erzeugende Ebene (Tangentialebene) der Developpablen D_1. Andererseits ist die Ebene durch g und die Tangente t_2 im Punkte ξ_2 die Berührungsebene der windschiefen Fläche im Punkte ξ_2, folglich auch eine erzeugende Ebene der Developpablen D_2.

Die erzeugenden oder Berührungs-Ebenen der beiden Developpablen D_1 und D_2 sind aber derart auf einander bezogen, dass solche Ebenen, welche die windschiefe Fläche R in entsprechenden Punkten ξ_1 und ξ_2 der Curven c_1 und c_2 berühren, einander entsprechen.

Denken wir uns nun die beiden Developpablen D_1 und D_2, welche so wie ihre Leitlinien c_1 und c_2 von der r-ten Classe sind, durch eine beliebige Ebene E geschnitten, so ergeben sich zwei

Curven r-ter Classe als Schnitte, deren Tangenten, indem sie Schnitte der Ebene E mit den Berührungsebenen der Developpablen D_1 und D_2 vorstellen, gleichfalls eindeutig einander entsprechen.

Nach Früherem ist die Curve, welche sich als geometrischer Ort der Schnittpunkte entsprechender Tangenten von C_1 und C_2 ergibt, von der $2r$-ten Ordnung.

Berücksichtigt man aber, dass je zwei entsprechende Ebenen der Developpablen D_1 und D_2 immer eine Erzeugende der windschiefen Fläche gemein haben, so ist klar, dass deren Schnitte mit der Ebene E, d. i. die entsprechenden Tangenten der Curven C_1 und C_2 sich in jenem Punkte treffen werden, in welchem die besagte Erzeugende die Ebene E schneidet, so dass die Curve, welche von den Schnittpunkten entsprechender Tangenten der C_1 und C_2 erzeugt wird, mit dem Schnitte der windschiefen Fläche R und der Ebene E identisch ist.

Da aber in dieser Hinsicht die Ordnung des Schnittes gleich jener der Regelfläche R, also gleich m ist, während früher die Ordnung gleich $2r$ gefunden wurde, so ist leicht einzusehen, dass es unter den Tangenten von C_1 und C_2 solche geben müsse, welche mit ihren entsprechenden Tangenten zusammenfallen und hiemit offenbar Gerade repräsentiren, welche zu dem Erzeugnisse der Schnittpunkte entsprechender Tangenten mitgehören.

Der Gesammtort derselben ist von der $2r$-ten Ordnung; ein Theil hievon stellt eine Curve m-ter Ordnung dar, und sonach ergibt sich die Anzahl der Paare zusammenfallender, entsprechender Tangenten als die Differenz:

$$(2r-m).$$

Nun ist aber weiters klar, dass sich die beiden Curven c_1 und c_2 auf der Regelfläche R in m Punkten scheiden. Die letztgenannten m Punkte sind nämlich jene, in welchen die Schnittgerade ihrer Ebenen die Regelfläche trifft.

Die Berührungsebenen der windschiefen Fläche in diesen m Punkten sind gleichzeitig erzeugende Ebenen der beiden Developpablen D_1 und D_2. Unter den vorerwähnten $(2r-m)$ Geraden, welche zusammenfallende, entsprechende Tangenten von C_1 und C_2 vorstellen, rühren demnach m derselben von den obgenannten Ebenen her, so zwar, dass sich nunmehr noch ein Rest von

$$2(r-m)$$

herausgestellt.

Durch das Vorausgeschickte wurde weiters klar gelegt, dass zwei entsprechende Ebenen der Developpablen D_1 und D_2 eine Erzeugende von R gemein haben. Unter allen Paaren solch entsprechender Ebenen gibt es demnach $2(r-m)$ derselben, welche noch eine zweite Gerade, d. i. ein Paar zusammenfallender Tangenten an C_1 und C_2 gemein haben, oder es gibt $2(r-m)$ zusammenfallende, entsprechende Ebenen der Developpablen D_1 und D_2.

Jede dieser Ebenen berührt die windschiefe Fläche in zwei verschiedenen Punkten einer Erzeugenden und folglich in allen Punkten derselben. Letzteres ist aber nur dann möglich, wenn diese Erzeugende von der unmittelbar folgenden geschnitten wird.

Wir gelangen mithin zu dem Resultate, dass eine windschiefe Regelfläche m-ter Ordnung und r-ten Ranges $2(r-m)$ Erzeugenden besitzt, in welchen sie den Charakter einer aufwickelbaren Fläche annimmt, also $2(r-m)$ Erzeugenden besitze, die von den unmittelbar benachbarten geschnitten werden.[1]

Um das Nachgewiesene auf die Normalenfläche anzuwenden, wird es nothwendig sein, deren Ordnung und Rang zu bestimmen.

Was die Ordnung betrifft, so wurde dieselbe durch:

$$(m^2 . m')$$

festgestellt, welche Ordnungszahl, wie wir wissen, auch mit der eines ebenen Schnittes derselben übereinstimmt.

Die Classe r des letzteren, d. i. der Rang der Normalenfläche, ergibt sich aus der Plücker'schen Gleichung:

$$r = \mu(\mu-1) - 2\delta - 3\varkappa,$$

in welcher bekanntlich μ die Ordnung, δ die Zahl der Doppelpunkte und $\varkappa$ jene der Rückkehrpunkte bezeichnet. Nun ist $\mu = m^2 . m'$, und da die Normalenfläche eine Doppelcurve $\frac{mm'}{2}(m^3m'-4m-m'+4)$-ter Ordnung besitzt, ist δ gleich dieser

[1] R. Sturm, über Normalen, Fusspunktscurven etc. (Annalen d. Math.) Bd. 6, Bd. 7.

Ordnungszahl, während $\varkappa$, da im Schnitte keine Rückkehrpunkte vorkommen, gleich Null ist.

Es ergibt sich sonach:

$$r = m^2m'(m^2m'-1) - mm'(m^3m'-4m-m'+4), \text{ oder}$$
$$r = mm'(3m+m'-4).$$

Greifen wir auf das vordem in der allgemeinen Entwicklung erhaltene Resultat $2(r-m)$ zurück, wodurch die Anzahl der Erzeugenden fixirt wurde, in welchen die windschiefe Regelfläche den Charakter einer aufwickelbaren annimmt, so erhalten wir durch Substitution auf den vorliegenden Fall angewendet:

$$2[mm'(3m+m'-4) - m^2m'] \text{ oder}$$
$$2mm'(2m+m'-4)$$

woraus der Satz folgt:

„Die Normalenfläche einer Fläche m-ter Ordnung längs ihres Schnittes mit einer Fläche m'-ter Ordnung besitzt

$$2mm'(2m+m'-4)$$

gerade Erzeugende, welche von ihren unmittelbar folgenden geschnitten werden, oder längs welcher sie den Charakter einer aufwickelbaren Fläche besitzt."

Diese Erzeugendenzahl lässt sich übrigens auch durch die Charaktere der ursprünglichen Leitfläche zum Ausdrucke bringen. Nach Früherem ist nämlich m die Ordnung und $r = m(m-1)$ der Rang oder die Classe eines ebenen Schnittes derselben. Die Classe der Leitcurve L wurde eingangs durch $\rho = mm'(m-1)$, ihre Ordnungszahl durch $\mu = mm'$ bestimmt, und die Zahl α' der Inflexionstangenten der Leitfläche in Punkten der Leitlinie ist bekanntlich gleich $mm'(3m+2m'-8)$, wonach:

$$\mu + \rho + \alpha' = mm' + mm'(m-1) + mm'(3m+2m'-8)$$
$$= 2mm'(2m+m'-4),$$

welches Resultat mit dem obigen in voller Übereinstimmung ist.

De la Gournerie nennt derartige Erzeugenden einer windschiefen Fläche, welche von den unmittelbar folgenden geschnitten werden, „Kanten" der windschiefen Fläche und die obbezeichneten Schnittpunkte „Spitzen" derselben.

Es wird nun auch keinem Anstande unterliegen, dem vorher aufgestellten Satze über die $2mm'(2m+m'-4)$ Kanten der Nor-

malenfläche eine etwas andere Fassung zu geben, und wollen wir, zur Erreichung unseres Zweckes, folgende Betrachtung anstellen.

Jede Erzeugende der Normalenfläche ist eine Normale der gegebenen Leitfläche.

Schneiden sich zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Normalen der Leitfläche, so ist die Verbindungslinie ihrer Fusspunkte ein Element einer Krümmungslinie der Leitfläche.

Hiernach ist einleuchtend, dass die Leitcurve L der Normalenfläche $2mm'(2m+m'-4)$ Elemente besitzt, welche gleichzeitig Elemente von Krümmungslinien sind, oder mit andern Worten, dass die Leitcurve L von $[2mm'(2m+m'-4)]$ Krümmungslinien der Fläche berührt wird.

Auf Grund dieser einfachen Betrachtung lässt sich der obige Satz in folgende Form bringen:

„Unter den Krümmungslinien einer Fläche m-ter Ordnung gibt es immer

$$2mm'(2m+m'-4),$$

welche die Schnittcurve dieser Fläche mit einer Fläche m'-ter Ordnung berühren, oder:

eine Curve mm'-ter Ordnung auf einer Fläche m-ter Ordnung hat

$$2mm'(2m+m'-4)$$

Krümmungslinien-Tangenten."

Ist speciell $m'=1$, d. h. die Leitlinie für die Normalenfläche ein ebener Schnitt der Leitfläche, so ist die Zahl der Kanten der Normalfläche:

$$2m(2m-3).$$

Diese Zahl drückt aus, wie gross die Anzahl der Krümmungslinien der Fläche ist, welche eine Ebene, oder, was dasselbe ist, einen ebenen Schnitt der Leitfläche berühren.

Da die Normalenfläche einer beliebigen Fläche F längs einer Leitcurve L identisch ist mit der Normalenfläche der Developpablen D, welche der Fläche F längs der Curve L umschrieben ist, so drängt sich uns die Ansicht auf, dass es von Nutzen sein dürfte, die Normalenflächen der aufwickelbaren Flächen einer eingehenderen Betrachtung und Untersuchung zu unterziehen.

Setzen wir zu diesem Zwecke voraus, die Cuspidalkante der Developpablen sei durch die Schnittlinie zweier Flächen m-ter

und m'-ter Ordnung, mithin durch eine Curve mm'-ter Ordnung gegeben.

Der Annahme gemäss ist sodann die Ordnung der Developpablen:

$$mm'(m+m'-2);$$

und ihre Classe:

$$3mm'(m+m'-3).$$

Die Normalen der aufwickelbaren Fläche stehen auf den Berührungsebenen derselben senkrecht. Die unendlich fernen Punkte der Normalen sind in Folge dessen polarreciprok zu den unendlich fernen Geraden der betreffenden Berührungsebenen der Developpablen in Bezug auf den unendlich fernen Kugelkreis.

Die unendlich ferne Leitlinie einer jeden Normalenfläche der Developpablen ist also die Reciprokalcurve der unendlich fernen Curve der letzteren in Bezug auf den imaginären Kugelkreis, mithin eine Curve

$$3mm'(m+m'-3)\text{-ter Ordnung.}$$

Nachdem das Gesagte von der Form und den Charakteren der Leitcurve der Normalenflächen unabhängig ist, ergibt sich als unmittelbare Folgerung der Satz:

„Sämmtliche Normalenflächen einer Developpablen haben jene Curve im Unendlichen gemein, welche sich als Reciproke der unendlich fernen Curve der Developpablen in Bezug auf den imaginären Kugelkreis ergibt."

Nehmen wir als Leitcurve für die Normalenfläche insbesondere die Cuspidalkante der Developpablen an, so erhalten wir als Normalenfläche jene windschiefe Fläche, welche unter dem Namen der Fläche der Binormalen für diese Cuspidalkante bekannt ist. Jede Erzeugende der Normalenfläche ist diesfalls eine Gerade, welche durch einen Punkt der Cuspidalkante senkrecht zu der zugehörigen Schmiegungsebene geführt wird, und daher die Binormale der Cuspidalkante in dem betreffenden Punkte repräsentirt.

Die bezeichnete Normalenfläche ist sonach durch zwei Leitlinien, d. i. der Cuspidalkante mm'-ter Ordnung und der unendlich fernen Leitlinie, welche von der $3mm'(m+m'-3)$-ten Ordnung ist, gegeben.

Die Erzeugenden sind Gerade, welche die Elemente zweier eindeutigen Reihen auf den bezeichneten Curven mit einander verbinden; es ergibt sich sonach der Grad der Fläche als Summe der Ordnungen ihrer Leitlinien und ist daher:

$$mm' + 3mm'(m + m' - 3) = mm'(3m + 3m' - 8)$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Der Grad der Binormalenfläche einer Raumcurve, welche sich als Schnitt zweier Flächen von den Ordnungen m und m' ergibt, ist ausgedrückt durch:

$$mm'(3m + 3m' - 8).$$

Eine weitere Eigenschaft, welche sich auf alle Normalenflächen einer und derselben aufwickelbaren Fläche bezieht, ergibt sich durch folgende Betrachtung.

Die unendlich ferne Leitcurve der Normalenflächen einer aufwickelbaren Fläche ist die Polarreciproke der unendlich fernen Curve dieser Developpablen.

Bezeichnen wir diese beiden unendlich fernen Curven wieder beziehungsweise mit U_n und U_d, so entspricht jeder Tangente von U_d ein Punkt der U_n derart, dass die durch die Tangente geführte erzeugende Ebene der Developpablen D senkrecht steht zu der durch den entsprechenden Punkt gehenden Erzeugenden der Normalenfläche.

Umgekehrt wird aber auch jeder Tangente von U_n ein Punkt auf U_d in der Weise entsprechen, dass eine durch die erstere gelegte Ebene zu einer durch den letzteren gehenden Geraden senkrecht steht.

Nennen wir daher l eine Erzeugende der Developpablen D und B die zugehörige Berührungsebene, welche die unendlich ferne Ebene in einer Tangente t_b der Curve U_d schneidet. Der Berührungspunkt von t_b ist der unendlich ferne Punkt u_l der Erzeugenden l. Sei ferner g jene Erzeugende der Normalenfläche, welche auf der Ebene B senkrecht steht, so wird ihr unendlich ferner Punkt u_g der Curve U_n angehören und reciprok der Tangente t_b entsprechen.

Denken wir uns die Tangente t_a im Punkte u_g der Curve U_n hinzu, so entspricht diese reciprok dem Punkte u_l der Curve U_d,

und die durch g und diese Tangente t_a gelegte Ebene A wird mithin auf der Erzeugenden der Developpablen D senkrecht stehen.

Bei näherer Betrachtung der so erhaltenen Ebene A finden wir, dass dieselbe die asymptotische Ebene der windschiefen Normalenfläche für die Erzeugende g sei, oder, was dasselbe ist, dass diese Ebene die windschiefe Normalenfläche im unendlich fernen Punkte u_g der Erzeugenden g berühre. Dieselbe enthält nämlich die bezeichnete Erzeugende und ausserdem die unendlich ferne Tangente t_a im Punkte u_g und berührt somit die Fläche in dem letztgenannten Punkte.

Hieraus ist gleichzeitig zu ersehen, dass die asymptotische Ebene der Normalenfläche für eine ihrer Erzeugenden g senkrecht stehe zu der entsprechenden Erzeugenden l der Developpablen D. Die durch g und l gelegte Ebene S wird mithin auf der asymptotischen Ebene senkrecht stehen.

Nun ist bekannt, dass eine Ebene, wie S, welche durch die Erzeugende g einer windschiefen Fläche senkrecht zu der asymptotischen Ebene dieser Erzeugenden gelegt wird, die windschiefe Fläche in dem Centralpunkte dieser Erzeugenden g, d. i. in jenem Punkte, welcher der Strictionslinie angehört, berührt.

Weiters haben wir zu beachten, dass die Ebene S, da sie durch die Normale g und die Erzeugende l der Developpablen D geht, zu der Tangentialebene B der letzteren senkrecht stehe. Nun ist aber l eine Tangente der Cuspidalcurve der Developpablen und B die zugehörige Schmiegungsebene; es wird mithin die durch l zu B senkrecht geführte Ebene eine rectificirende Ebene der Cuspidalkante sein.

Auf Grund dieses Ergebnisses gelangen wir zu dem Resultate, dass alle Centralebenen der Normalenfläche einer Developpablen D, d. i. alle Ebenen, welche eine windschiefe Normalenfläche in Punkten ihrer Strictionslinie berühren, gleichzeitig rectificirende Ebenen jener Developpablen seien.

Die aufwickelbare Fläche also, welche der windschiefen Normalenfläche längs ihrer Strictionslinie umschrieben werden kann, ist mithin die rectificirende Fläche der Cuspidalkante der developpablen Leitfläche D.

Aus dem Umstande endlich, dass bei unserer Betrachtung die Leitcurve L der Normalenfläche auf der Developpablen ganz und gar unbestimmt gelassen wurde, wird anstandslos gefolgert werden können, dass obige Eigenschaft für alle Normalenflächen einer und derselben Developpablen D gilt.

Wir können somit den Satz aufstellen:

„Die rectificirende Fläche einer Raumcurve berührt sämmtliche Normalenflächen der zu dieser Raumcurve gehörenden Tangentenfläche längs ihren Strictionslinien.“

Unter den Normalenflächen einer aufwickelbaren Fläche haben wir bereits früher diejenige hervorgehoben, welche zur Leitlinie die Cuspidalkante der Developpablen hat und die Binormalenfläche dieser Cuspidalkante vorstellt. Auch diese wird dem vorhergehenden Satze gemäss von der rectificirenden Fläche der Cuspidalkante längs ihrer Strictionslinie berührt.

Man sieht aber sofort, dass diese Berührungslinie keine andere, als die Cuspidalkante selbst ist, so dass der Satz gilt:

„Die Strictionslinie der Binormalenfläche einer Raumcurve ist diese Raumcurve selbst.“

Im Allgemeinen ist die Leitlinie der Normalenfläche nicht auch gleichzeitig die Strictionslinie der Normalenfläche, obwohl man hiezu leicht durch die irrthümliche Annahme verleitet werden könnte, dass sämmtliche Erzeugenden der Normalenfläche auf der Leitlinie senkrecht stehen.

Wir wollen hier untersuchen, wann der fragliche Fall wirklich eintritt.

Es wurde in dem Vorhergehenden bewiesen, dass die Normalenfläche einer aufwickelbaren Fläche längs ihrer Cuspidalkante die Binormalenfläche der letzteren repräsentire, und dass die Cuspidalkante in diesem Falle gleichzeitig die Strictionslinie der Binormalenfläche sei.

Nun ist aber weiters auch klar, dass die Cuspidalkante einer aufwickelbaren Fläche die einzige Curve auf derselben ist, welche als Leitlinie der Normalenfläche angenommen, zugleich die Strictionslinie der letzteren darstellt.

Sei also F irgend eine Fläche, L eine auf derselben gegebene Curve als Leitlinie für die Normalenfläche und endlich D die der Fläche F längs der Curve L umschriebene Developpable.

Da die Fläche F und die ihr umschriebene Developpable D längs der gemeinschaftlichen Berührungscurve L die nämliche Normalenfläche besitzen, so ist hieraus die Bedingung leicht zu erkennen, welcher L genügen muss, um gleichzeitig die Strictionslinie repräsentiren zu können.

Die Curve L muss nämlich in diesem Falle zu gleicher Zeit auch die Cuspidalkante der Developpablen sein, oder mit andern Worten, die Curve L auf der Fläche F muss die Eigenschaft besitzen, dass ihre Schmiegungsebenen zugleich die Fläche F berühren. Eine Curve dieser Eigenschaft wird bekanntlich eine asymptotische Linie der Fläche F genannt. Wir gelangen hiernach zu dem Satze:

„Wird auf einer beliebigen Fläche als Leitlinie für die Normalenfläche eine asymptotische Linie der letzteren angenommen, so repräsentirt diese gleichzeitig die Strictionslinie der Normalenfläche."

Ferner wurde in dem Vorhergegangenen gezeigt, dass die asymptotische Ebene der Normalenfläche einer Developpablen für eine Erzeugende der ersteren senkrecht stehe auf der entsprechenden geradlinigen Erzeugenden der letzteren.

Diese Eigenschaft führt unter einer bestimmten Voraussetzung über die Natur der Leitcurve zu einen höchst wichtigen Satz.

Setzen wir nämlich voraus, es sei C (Fig. 4) die Cuspidalkante der developpablen Leitfläche D. Als Leitlinie L für die Normalenfläche nehmen wir eine sogenannte orthogonale Trajectorie (Filarevolvente) der Raumcurve C, d. i. eine Curve auf der Developpablen D an, welche sämmtliche Erzeugenden derselben rechtwinklig schneidet.

Sei l eine Erzeugende der Developpablen D, welche die vorgenannte Trajectorie L im Punkte m treffen mag. Die Tangente t an L im Punkte m ist, der Voraussetzung gemäss, senkrecht zu l. Ferner sei g die Normale der Developpablen D im Punkte m, also eine Erzeugende der Normalenfläche.

Die asymptotische Ebene A der Normalenfläche für die Erzeugende g ist, wie bereits nachgewiesen, senkrecht zu l. Dieselbe enthält mithin auch die zu l senkrechte Gerade t. Die Trajectorie L ist eine Curve der Normalenfläche und t ihre Tangente im Punkte m. Die Ebene A, welche durch die Erzeugende g geht

und diese Tangente t enthält, berührt demnach die Normalenfläche nicht nur in dem unendlich fernen Punkte von g, sondern auch im Punkte m der nämlichen Erzeugenden.

Wir wissen aber, dass eine windschiefe Fläche von einer Ebene, welche durch eine ihrer Erzeugenden gelegt wird, nur in einem Punkte dieser letzteren berührt wird.

Tritt mithin der Fall ein, dass eine Ebene, welche durch eine geradlinige Erzeugende einer Regelfläche geht, diese in zwei Punkten berührt, so kann diese Fläche nur eine aufwickelbare sein, und wird dieselbe auch in allen anderen Punkten der besagten Erzeugenden mit der oberwähnten Ebene eine Berührung eingehen.

Man ersieht hieraus, dass die Normalenfläche der aufwickelbaren Fläche D längs der orthogonalen Trajectorie L keine windschiefe, sondern eine aufwickelbare Fläche ist, dass also die Trajectorie L eine Krümmungslinie der aufwickelbaren Fläche D sei.

Das Gesagte gilt selbstverständlich von allen orthogonalen Trajectorien.

Weiters ist klar, dass die geradlinigen Erzeugenden der Developpablen D gleichfalls Krümmungslinien der Fläche sind, indem letztere in allen Punkten einer solchen Erzeugenden von einer und derselben Ebene berührt wird. Die Normalen werden demnach ebenfalls eine Ebene repräsentiren, welche gleichzeitig eine rectificirende Ebene der Cuspidalkante ist. Es folgt hieraus der bekannte Satz:

„Auf einer developpablen Fläche bilden die geradlinigen Erzeugenden das eine System, die orthogonalen Trajectorien dagegen das andere System von Krümmungslinien.“

Bei einer aufwickelbaren Fläche vertritt, wie wir wissen, die Cuspidalkante die Stelle der Strictionslinie; es werden daher auch, nach einem vorher angeführten Satze die Cuspidalkanten aller entwickelbaren Normalenflächen einer Developpablen D auf der rectificirenden Fläche der Cuspidalkante C von D liegen.

Bei intensiverem Eingehen und näherer Betrachtung der erzielten Resultate gelangen wir noch zu einer äusserst interessanten Eigenschaft, die wir hier nicht unerörtert lassen wollen.

Wie erwähnt, ist die durch g und t (Fig. 4) gehende Ebene A eine Berührungsebene der aufwickelbaren Normalenfläche und

g die Berührungserzeugende auf der letzteren. Bezeichnen wir nun die zu der developpablen Normalenfläche gehörende Cuspidalkante mit C_L, so ist g eine Tangente von C_L und die Ebene A die zugehörige Schmiegungsebene.

Führen wir durch g zu A eine senkrechte Ebene, so berührt diese gleichfalls die Curve C_L und wird zur rectificirenden Ebene von C_L. Ferner enthält aber dieselbe Ebene auch die Erzeugende L der gegebenen Developpablen und steht auf der Berührungsebene B, der ursprünglichen Developpablen D längs l, senkrecht, da in ihr die zu dieser Ebene senkrechte Gerade gelegen ist; dieselbe ist somit auch eine rectificirende Ebene der Cuspidalkante C der Developpablen D.

Hiedurch ist sichergestellt, dass sämmtliche rectificirenden Ebenen der Cuspidalkante C der Leitdeveloppablen D gleichzeitig rectificirende Ebenen für die Cuspidalkanten aller entwickelbaren Normalenflächen von D sind, oder, mit andern Worten, dass die rectificirende Fläche von C auch rectificirende Fläche für die Cuspidalkanten aller aufwickelbaren Normalenflächen von D seien, dass also die Cuspidalkanten der letzteren geodätische Linien der rectificirenden Fläche der Cuspidalkante C von D sind.

Bezeichnen wir nun, der Kürze halber, eine aufwickelbare Normalenfläche irgend einer beliebigen Fläche als „Normalentorse", so können wir den Satz aufstellen:

„Die rectificirende Fläche einer Raumcurve ist gleichzeitig auch rectificirende Fläche für die Cuspidalkanten aller Normalentorse der zu dieser Raumcurve gehörenden Tangentendeveloppablen", oder:

„Die Cuspidalkanten aller Normalentorse einer developpablen Fläche sind geodätische Linien auf der rectificirenden Fläche der Cuspidalkante jener Leitdeveloppablen."

Ist eine Developpable von der m-ten Ordnung und der n-ten Classe, so gilt dasselbe auch von einem ebenen Schnitte derselben.

Die Normalenfläche der Developpablen längs dieses ebenen Schnittes ist vom $(m+n)$-ten Grade, da die eine Leitlinie S der Normalenfläche von der m-ten Ordnung, und die unendlich ferne Leitlinie U_n als Reciproke der unendlich fernen Curve U_d der Developpablen, von der n-ten Ordnung ist.

Denken wir uns die Ebene des Schnittes S als Projektionsebene, so sind die Tangenten von S gleichzeitig die Tracen der Berührungsebenen der Developpablen in den Punkten von S, mithin die Normalen der Curve S zu gleicher Zeit auch die Projectionen der Flächennormalen auf die Ebene des Schnittes S, oder, was dasselbe ist, die Evolute der Curve S ist die orthogonale Contour der windschiefen Normalenfläche auf der Ebene der Leitlinie S.

Nachdem aber, wie wir wissen, die Contour einer windschiefen Fläche μ-ten Grades eine Curve μ-ter Classe ist, wird die Evolute der Curve S von der $(m+n)$-ten Classe sein.

Hiernach ergibt sich der Chasles'sche Satz:

„Von einem Punkte aus können an eine Curve m-ter Ordnung und n-ter Classe $(m+n)$ Normalen gezogen werden", oder:

„Die Evolute einer ebenen Curve m-ter Ordnung und n-ter Classe ist eine Curve $(m+n)$-ter Classe."

Auch die Ordnung der Evolute einer Curve m-ter Ordnung und n-ter Classe lässt sich durch eine einfache Betrachtung über Normalenflächen anstandslos ermitteln.

Setzen wir voraus, es werde durch die Curve $C(m, n)$ eine aufwickelbare Fläche gelegt. Die Normalenfläche der letzteren längs der Curve C ist, wie vorher gezeigt, eine windschiefe Fläche vom $(m+n)$-ten Grade. Die orthogonale Contour der Normalenfläche auf der Ebene der Leitcurve C (letztere als Projectionsebene betrachtet) ist, wie bereits nachgewiesen, die Evolute der Curve C.

Es ist klar, dass die Contour einer Fläche auf irgend einer Ebene von der nämlichen Ordnung ist, wie der der Fläche aus einem beliebigen Punkte umschriebene Kegel. Diese ist aber, wenn wir die Ordnung der Fläche mit μ und jene ihrer Doppelcurve mit b bezeichnen, vorausgesetzt, dass die Fläche keine Cuspidalkante besitzt, ausgedrückt durch:

$$\mu\,(\mu-1)-2b.$$

Für die Normalenfläche ist $\mu = m+n$.

Die Ordnung b der Doppelcurve ergibt sich wie folgt.

Die Normalenfläche entsteht als Ort der Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte zweier eindeutigen Punktreihen, deren eine auf der ebenen Leitcurve m-ter Ordnung, und deren zweite auf der im Unendlichen liegenden Leitcurve n-ter Ordnung sich vorfindet.

Der Schnitt der Normalenfläche mit der unendlich fernen Ebene besteht, ausser der betreffenden Curve, aus den m Erzeugenden, welche die m Schnittpunkte der Curve C mit der unendlich fernen Ebene mit den ihnen entsprechenden Punkten auf U_n verbinden.

Dieser unendlich ferne Gesammtschnitt besitzt einerseits die τ eigentlichen Doppelpunkte, andererseits die i eigentlichen Rückkehrpunkte der Curve U_n und ferner die $\frac{m}{2}(m-1)$ Schnittpunkte der m Erzeugenden untereinander. Endlich schneidet jede dieser m Erzeugenden die Curve U_n in n Punkten, wovon einer ein Berührungspunkt der Fläche mit der unendlich fernen Ebene ist, die übrigen $(n-1)$ dagegen Doppelpunkte sind.

Die Gesammtheit aller Doppelpunkte ist hiernach:

$$m(n-1)+\frac{m}{2}(m-1)+\tau+i \text{ oder:}$$

$$mn+\frac{m}{2}(m-3)+\tau+i.$$

Die Zahlen τ und i lassen sich leicht durch Charaktere der gegebenen Leitcurve C, welche m-ter Ordnung und n-ter Classe ist, ausdrücken. Da nämlich die Curve U_n eine Polarreciproke zu der unendlich fernen Curve der Developpablen, also eine Curve von der Ordnung n und der Classe m ist, bedeutet auch τ die Anzahl der Doppeltangenten und i jene der Inflexionstangenten der gegebenen Curve C.

Setzen wir i als bekannt voraus, so folgt aus der Plücker'schen Formel:

$$m=n(n-1)-2\tau-3i$$

$$\tau=\frac{1}{2}[n(n-1)-m-3i]$$

und sonach für die obangegebene Zahl der Doppelpunkte (im Unendlichen):

$$mn+\frac{m}{2}(m-3)+\frac{1}{2}[n(n-1)-m-3i]+i \text{ oder:}$$

$$\frac{1}{2}[(m+n)^2-4m-n-i],$$

welche Zahl offenbar auch die Ordnung b der Doppelcurve der Normalenfläche bestimmt.

Mithin wird die Ordnung des der Normalenfläche aus einem Punkte umschriebenen Kegels oder, mit andern Worten, die Ordnung ihrer Projection (Contour) auf eine Ebene oder endlich die Ordnung der Evolute der ebenen Leitcurve, ausgedrückt durch:

$$(m+n)(m+n-1)-[(m+n)^2-4m-n-i]=3m+i.$$

Die eben gefundene Zahl $(3m+i)$ ist aber, wenn $\varkappa$ die Anzahl der Rückkehrpunkte der gegebenen Curve bedeutet, nach der Plücker'schen Gleichung: $i-\varkappa=3(n-m)$ auch gleich:

$$3n+\varkappa.$$

Hieraus folgt der Satz:

„Die Ordnung der Evolute einer ebenen Curve m-ter Ordnung und n-ter Classe mit i Inflexionstangenten und $\varkappa$ Rückkehrpunkten ist bestimmt durch:

$$3m+i=3n+\varkappa.\text{“}$$

Bisher haben wir für die Normalenflächen auf den developpablen Flächen nur solche Curven als Leitlinien in Betracht gezogen, welche mit jeder Erzeugenden der Developpablen bloss einen Punkt gemein haben.

In Folgendem wollen wir allgemeiner vorgehen und voraussetzen, die Leitlinie der Normalenfläche auf der Developpablen sei der vollständige Durchschnitt dieser Fläche mit irgend einer beliebigen Fläche μ-ter Ordnung. Der Grad der Normalenfläche ist zu bestimmen.

Es sei $\boldsymbol{D}$ die gegebene Leitdeveloppable, $\boldsymbol{L}$ ihr vollständiger Durchschnitt mit der Fläche μ-ter Ordnung und, der Annahme

gemäss, gleichzeitig die Leitlinie für die Normalenfläche. Als zweite Leitlinie für die letztgenannte Fläche erhalten wir jene unendlich ferne Leitcurve U_n, welche zu der im Unendlichen liegenden Curve U_d der Developpablen, in Bezug auf den imaginären Kugelkreis im Unendlichen, polarreciprok ist.

Jede Erzeugende der Developpablen D wird offenbar von der Fläche μ-ter Ordnung in μ Punkten geschnitten, welche Schnittpunkte sämmtlich der Curve L angehören. Es hat sonach die Leitcurve L der Normalenfläche mit jeder Erzeugenden der Developpablen D, μ Punkte gemeinschaftlich.

Denken wir uns nun die Tangentialebene der Developpablen längs einer ihrer Erzeugenden g konstruirt, so ergeben sich die Erzeugenden der Normalenfläche in den μ Punkten, welche g mit L gemein hat, als die Senkrechten zu dieser Berührungsebene. Dieselben sind somit untereinander parallel, und der ihnen gemeinschaftliche unendlich ferne Punkt wird offenbar der Leitcurve U_n der Normalenfläche angehören.

Hieraus ist zu ersehen, dass es unendlich viele Gruppen von je μ parallelen Erzeugenden auf der Normalenfläche gebe, dass also mit andern Worten, durch jeden Punkt der unendlich fernen Leitcurve U_n, μ Erzeugende der Normalenfläche gehen. Besagte Curve ist somit eine μ-fache Leitlinie der Normalfläche.

Die Normalenfläche entsteht mithin als Erzeugniss der Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte zweier Punktreihen auf den Curven L und U_n, welche derart mit einander verwandt sind, dass einem Punkte von U_n, μ Punkte auf L, jedem Punkte von L hingegen nur ein einziger Punkt von U_n entspricht.

Setzen wir voraus, es sei m die Ordnung und n die Classe der gegebenen Leitdeveloppablen, so erhalten wir als Leitcurve L eine Curve $m\mu$-ter Ordnung, während die μ-fache Curve U_n, im Unendlichen, von der n-ten Ordnung ist.

Um nun aus den hier gesammelten Daten, sowie aus der Natur der oben angedeuteten Verwandtschaft den Grad der Normalenfläche abzuleiten, wollen wir noch folgende allgemeine Betrachtung anstellen.

Seien C_1 und C_2 zwei Raumcurven, deren Ordnungen beziehungsweise m_1 und m_2 sein mögen. Auf diesen Curven seien zwei Punktreihen derart gegeben, dass einem Punkte der Reihe

auf C_1, α Punkte der Reihe C_2, und einem Punkte der Reihe $C_2 \ldots \beta$ Punkte der Reihe C_1 entsprechen; es ist der Grad jener Regelfläche zu bestimmen, deren Erzeugenden die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte von C_1 und C_2 sind.

Nehmen wir zu diesem Behufe eine beliebige Gerade g im Raume an, und suchen wir die Zahl ihrer Schnittpunkte mit der Regelfläche d. i. die Anzahl jener Erzeugenden der Regelfläche, welche die Gerade g schneiden. Denken wir uns ferner zu diesem Zwecke die Gerade g als gemeinschaftliche Axe zweier Ebenenbüschel Σ_1 und Σ_2, deren ersteres zu der Punktreihe auf C_1, und deren zweites zu der Punktreihe auf C_2 perspektivisch ist.

Bezeichnen wir mit E_1 eine Ebene des Büschels Σ_1, so trifft diese Ebene die Raumcurve C_1 in m_1 Punkten. Jedem dieser m_1 Punkte entsprechen auf der Curve C_2, α Punkte; den m_1 Punkten, oder, was dasselbe ist, der Ebene E_1 des Büschels Σ_1 entsprechen somit $\alpha . m_1$ Punkte der Reihe auf der Curve C_2. Durch jeden dieser $\alpha . m_1$ Punkte und die Gerade g geht je eine Ebene, welche der Ebene E_1 entspricht, woraus folgt, dass einer Ebene des Büschels Σ_1 auch αm_1 Ebenen des Büschels Σ_2 entsprechen.

Ist umgekehrt E_2 eine Ebene des Büschels Σ_2, so trifft diese die Curve C_2 in m_2 Punkten, deren jedem auf der Curve $C_1 \ldots \beta$ Punkte entsprechen. Der Gesammtheit der m_2 Punkte entsprechen mithin auf der Curve $C_1 \ldots \beta m_2$ Punkte. Durch jeden derselben und die Gerade g ist eine Ebene bestimmt, welche jener E_2 entspricht, daher einer Ebene des Büschels $\Sigma_2 \ldots \beta m_2$ Ebenen im Büschel Σ_1 entsprechen.

Aus diesen einfachen Erörterungen geht hervor, dass die beiden zu den Punktreihen C_1 und C_2 perspectivischen Ebenenbüschel so auf einander bezogen sind, dass einer Ebene des einen Büschels αm_1 Ebenen des zweiten und umgekehrt einer Ebene des zweiten Büschels βm_2 Ebenen des ersteren entsprechen.

Nach dem Chasles'schen Correspondenzprincipe besitzen diese beiden Ebenenbüschel

$$(\alpha m_1 + \beta m_2)$$

Doppelelemente, oder, was dasselbe ist, es kömmt im Ganzen $(\alpha m_1 + \beta m_2)$mal vor, dass eine Ebene des einen Büschels mit

der ihr entsprechenden Ebene des anderen Büschels zusammenfällt.

Die Bedeutung dieser Doppelebenen für die Regelfläche ist leicht zu ermitteln. Beachtet man, dass jede dieser Doppelebenen ansser der Geraden g noch zwei einander entsprechende Punkte der Reihen C_1 und C_2, also eine Erzeugende der fraglichen Regelfläche enthält, so ist anderweitig klar, dass es $(\alpha m_1 + \beta m_2)$ Erzeugenden der Regelfläche gibt, welche die beliebig angenommene Gerade g schneiden.

Jeder Schnittpunkt von g mit einer solchen Erzeugenden ist gleichzeitig ein Schnittpunkt von g mit der Regelfläche, woraus folgt, dass letztere vom

$$(\alpha m_1 + \beta m_2)\text{-ten}$$

Grade ist.

Für die zu betrachtende Normalenfläche treten an die Stelle der allgemein angenommenen Leitlinien C_1 und C_2 die Curven L und U_n; es ist mithin $m_1 = m\mu$ und $m_2 = n$.

Ferner entspricht einem Punkte von L ein einziger Punkt auf U_n; es ist also: $\alpha = 1$. In ähnlicher Weise entsprechen einem Punkte der $U_n \ldots \mu$ Punkte der Curve L, so dass $\beta = \mu$ wird.

Mit Bezug auf die hier festgestellten Daten nimmt der Ausdruck $(\alpha m_1 + \beta m_2)$ den Werth:

$$\mu m + \mu n = \mu(m + n)$$

an, welcher den Grad der betrachteten Normalenfläche bestimmt.

Es besteht demgemäss der Satz:

„Die Normalenfläche einer aufwickelbaren Fläche m-ter Ordnung und n-ter Classe längs ihres vollständigen Durchschnittes mit einer Fläche μ-ter Ordnung, ist eine windschiefe Fläche $\mu(m+n)$-ten Grades.“

Für $\mu = 1$, d. h. für einen ebenen Schnitt der developpablen Fläche als Leitlinie der Normalenfläche, reducirt sich der Grad auf $(m+n)$, welches Resultat mit dem bereits früher gefundenen übereinstimmt.

Wenn ferner an die Stelle der Leitcurve L von der $m\mu$-ten Ordnung, eine Curve m_1-ter Ordnung tritt, welche mit jeder Erzeugenden der Developpablen bloss einen Punkt gemein hat,

so ist auch $\mu = 1$, und daher der Grad der Normalenfläche für diesen Fall: $(m_1 + n)$, welches Resultat gleichfalls mit jenem in Übereinstimmung ist, das vordem auf anderem Wege vermittelt wurde.

Die μ Normalen der developpablen Fläche in den μ Schnittpunkten einer beliebigen Erzeugenden g mit der Leitlinie L liegen sämmtlich in einer und derselben Ebene, derjenigen Ebene nämlich, welche durch g zu der Berührungsebene der Developpablen senkrecht geführt werden kann.

Eine solche Ebene berührt die windschiefe Fläche in irgend einem Punkte einer jeden dieser μ Erzengenden und ist mithin eine μfache Berührungsebene der Normalenfläche.

Der Gesammtschnitt dieser Ebene mit der Normalenfläche ist eine Curve $\mu(m+n)$-ter Ordnung. Die μ geraden Erzeugenden bilden einen Bestandtheil μ-ter Ordnung in diesem Schnitte, und der Rest ist sonach eine Curve:

$$\mu(m+n-1)\text{-ter Ordnung.}$$

Besagte Curve schneidet die μ Erzeugenden in

$$\mu^2(m+n-1)$$

Punkten, in deren Zahl die obgenannten μ Berührungspunkte mit inbegriffen sind.

Die übrigen:

$$\mu^2(m+n-1)-\mu = \mu[\mu(m+n-1)-1]$$

Punkte gehören der Doppelcurve der Normalenfläche an.

Auf jede der μ Erzeugenden entfallen somit:

$$\mu(m+n-1)-1 = \mu(m+n)-(\mu+1)$$

Punkte der Doppelcurve.

Nun ist aber aus Früherem bekannt, dass die Doppelcurve einer windschiefen Fläche $\mu(m+n)$-ter Ordnung jede Erzeugende in:

$$\mu(m+n)-2$$

Punkten schneidet.

Wie ersichtlich, stellt sich diesfalls zwischen den beiden hier angeführten Werthen eine Differenz von $(\mu-1)$ heraus, und es

kann die natürliche Frage aufgeworfen werden, worin die Ursache dieser Verschiedenheit liege und welcher dieser beiden Werthe der richtige sei.

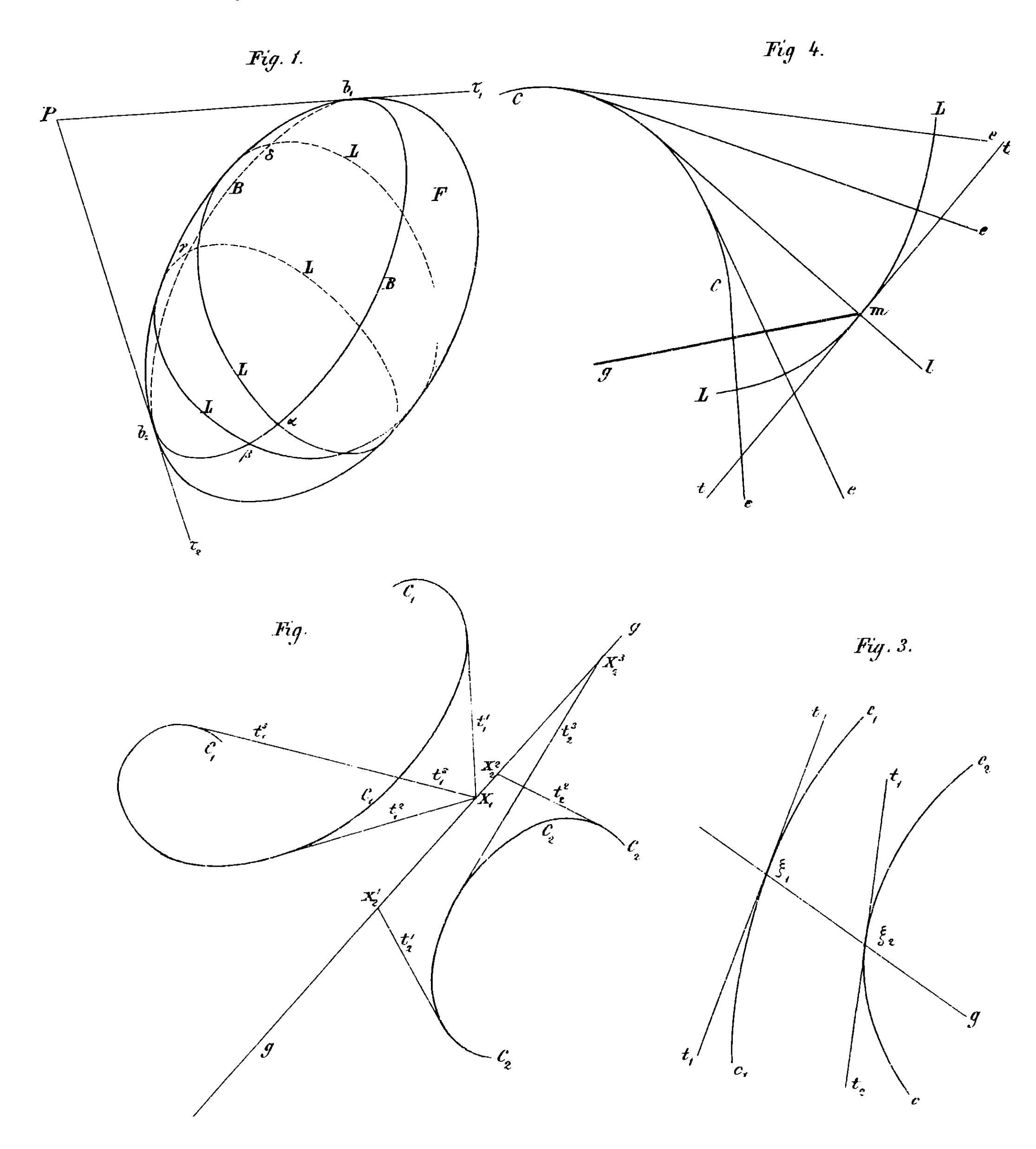
Die sich ergebende Differenz ist sehr leicht erklärlich, wenn man bedenkt, dass der unendlich ferne Punkt der μ Erzeugenden auf jeder derselben als $(\mu - 1)$facher Punkt gerechnet wurde, indem jede der μ Erzeugenden in demselben von allen übrigen $(\mu - 1)$ Erzeugenden geschnitten wird.

Nachdem jedoch dieser Punkt der eigentlichen Doppelcurve nicht angehört, so ist selbstverständlich, dass die Anzahl der auf einer Erzeugenden liegenden Doppelpunkte (im erst angegebenen Werthe) um $(\mu - 1)$ vermindert werden müsse.

Hiedurch ist die vollkommene Übereinstimmung der beiden obangegebenen Werthe hergestellt und die unbedingte Richtigkeit des letzteren nachgewiesen.

Hiemit wollen wir unsere dermaligen Untersuchungen über Normalenflächen abschliessen, behalten uns jedoch vor, die allenfallsigen Ergänzungen dieser Partie ebenso wie die Anwendung der gewonnenen Resultate auf Normalenflächen für specielle Flächengattungen als Leitflächen, so wie für specielle Lagen der Leitcurven auf denselben ehestens folgen zu lassen.

Peschka Beiträge zur Theorie der Normalflächen



F. Schima lith.

Druck v. J. Wagner Wien.